ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ HỒNG THÚY

BẤT ĐẲNG THỨC TRONG SỐ HỌC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ HỒNG THÚY

BẤT ĐẲNG THỨC TRONG SỐ HỌC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu**

Thái Nguyên - 2018

Mục lục

MỞ ĐẦU

Chuyên đề số học là một nội dung rất quan trọng ở bậc trung học phổ thông. Các dạng toán về đếm số phần tử, so sánh và sắp thứ tự các số trong tập hợp là nội dung cơ bản của các đề thi HSG quốc gia và Olympic toán khu vực và quốc tế.

Đặc biệt là trong lý thuyết số, các hàm số học liên quan đến tính toán các ước của một số nguyên, gắn với phép đếm số các ước số và các dạng toán liên quan đến biểu diễn các số nguyên là trọng tâm trong các khảo sát đẳng thức và bất đẳng thức trong số học.

Luận văn này nhằm mục đích tìm hiểu chi tiết các tính chất của hàm số học và một số dạng toán về bất đẳng thức và cực trị liên quan trong số học.

Ngoài phần Mở đầu và Kết luận, luận văn được chia thành ba chương đề cập đến các vấn đề sau đây:

Chương 1 trình bày về bài toán về đếm, ước lượng và sắp thứ tự.

Chương 2 trình bày các dạng bất đẳng thức và các tính toán liên quan đến tập rời rạc và các hàm số học.

Chương 3 trình bày một số bài toán về cực trị và các đề thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic khu vực và quốc tế liên quan đến bất đẳng thức số học.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Nhà giáo nhân dân, GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới GS - Người thầy rất nghiêm khắc, tận tâm trong công việc và đã truyền thụ nhiều kiến thức quý báu cũng như kinh nghiệm nghiên cứu khoa học cho tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu đề tài.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng đào tạo sau đại học, khoa Toán - Tin của trường Đại học Khoa học - Đại học

Thái Nguyên, cùng các thầy cô giáo đã tham giảng dạy và hướng dẫn khoa học cho lớp Cao học toán K10C.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, tập thể giáo viên toán trường THPT Lý Nhân Tông, thành phố Bắc Ninh và gia đình đã tạo điều kiện cho tác giả có cơ hội học tập và nghiên cứu.

Chương 1. Các tính toán trên tập hữu hạn số nguyên

1.1 Số nguyên và các tính chất liên quan

Trước tiên, ta xét một số hàm số học cơ bản.

Định nghĩa 1.1 (Hàm số Euler $\varphi(n)$)**.** Cho số tự nhiên $n \geq 1$. Ta ký hiệu $\varphi(n)$ là số các số tự nhiên bé hơn n và nguyên tố cùng nhau với n. Quy ước $\varphi(1) = 1$.

Định lý 1.1. Hàm $\varphi(n)$ có tính chất nhân tính theo nghĩa: Nếu a, b là hai số nguyên tố cùng nhau thì

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Chứng minh.

Rõ ràng ta có thể giải thiết $a > 1, b > 1$. Các số nguyên dương không vượt quá ab được liệt kê như sau:

1	2		a
$a+1$	$a+2$	$\ldots\ldots\ldots$	$2a$
$2a+1$	$2a+2$		$3a$
$ka+1$	$ka+2$	$\ldots\ldots\ldots$	$(k+1)a$
$(b-1)a+1$	$(b-1)a+2$		ba

Các số đó sắp thành bảng có dạng $ax + y$, trong đó $0 \leq x \leq b-1, 1 \leq y \leq a$.

Xét các số ở cột thứ y. Ta có $(ax + y, a) = (y, a)$. Vì một số nguyên tố với ab khi và chỉ khi nó nguyên tố với a và b, do đó các số này phải nằm ở cột thứ y mà $(y, a) = 1$. Có cả thảy $\varphi(a)$ cột như vậy. Xét một cột thứ y, với $(y, a) = 1$.

Các số ở trong cột này là

$$y, a+y, 2a+y, \ldots, (b-1)a+y.$$

Giả sử r_x là số dư khi chia $ax+y$ cho b. Như vậy $(ax+y,b)=(r_x,b)$. Dễ dàng thấy rằng vì $(a,b)=1$ nên $r_{x_1}\neq r_{x_2}$ với $x_1\neq x_2$. Như vậy ta có đẳng thức tập hợp

$$\{r_0, r_1, \ldots, r_{b-1}\} = \{0, 1, \ldots, b-1\}.$$

Vậy số các x mà $(ax+y,b)=1$ chính là số các x mà $(r_x,b)=1$ tức chính là $\varphi(b)$.

Vậy cả thẩy có $\varphi(a)\varphi(b)$ số nguyên tố với a và nguyên tố với b. Đó chính là các số nguyên tố với ab. Nói cách khác $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

Từ định lý này ta suy ra công thức tính $\varphi(n)$ như sau.

Định lý 1.2. Giả sử $n = p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ là phân tích tiêu chuẩn của $n>1$. Khi đó

$$\varphi(n) = n\Big(1-\frac{1}{p_1}\Big)\Big(1-\frac{1}{p_2}\Big)\ldots\Big(1-\frac{1}{p_k}\Big).$$

Chứng minh.

Theo định lý 1.1, ta có $\varphi(n)=\varphi(p_1^{\alpha_1})\ldots\varphi(p_k^{\alpha_k})$.

Định lý sẽ được chứng minh nếu ta chứng tỏ rằng ứng với p là một số nguyên tố thì $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha(1-\dfrac{1}{p})$. Thật vậy, vì p là nguyên tố nên với mỗi $k\le p^\alpha$ thì $(k,p)=1$ hoặc $k \vdots p$.

Số các số $k\le p^\alpha$ và là bội của p là $\left[\dfrac{p^\alpha}{p}\right]=p^{\alpha-1}$.

Vậy

$$\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}=p^\alpha(1-\frac{1}{p}).$$

Ví dụ 1.1. Với $n=360=2^3.3^2.5$ thì

$$\varphi(360)=360\Big(1-\frac{1}{2}\Big)\Big(1-\frac{1}{3}\Big)\Big(1-\frac{1}{5}\Big)=96.$$

Tầm quan trọng của hàm $\varphi(n)$ trong số học được thể hiện trong định lý Euler. Sau đây là một sự suy rộng của định lý Euler.

Định lý 1.3 (Định lý Euler mở rộng)**.** Cho a và m là hai số tự nhiên. Khi đó ta có

$$a^m \equiv a^{m-\varphi(m)} \pmod m.$$

Chứng minh.

Ta phải chứng minh

$$A = a^m - a^{m-\varphi(m)} = a^{m-\varphi(m)}(a^{\varphi(m)} - 1)$$

chia hết cho m.

Giả sử m có phân tích tiêu chuẩn là

$$m = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng nếu $(a, q_i) = 1$ thì $(a^{\varphi(m)} - 1) \vdots q^{\alpha_i}$, còn nếu $a \vdots q$ thì $a^{m-\varphi(m)} \vdots q^{\alpha_i}$, và như vậy $A \vdots m$.

Thật vậy, nếu $(a, q_i) = 1$ thì theo định lý Euler

$$(a^{\varphi(q_i^{\alpha_i})} - 1) \vdots q_i^{\alpha_i}.$$

Mặt khác,

$$\varphi(q_i^{\alpha_i}) = q_i^{\alpha_i}(1 - \frac{1}{q_i}).$$

là ước của $\varphi(m)$ (suy ra từ công thức tính $\varphi(m)$).

Do đó

$$(a^{\varphi(m)} - 1) \vdots (a^{\varphi(q_i^{\alpha_i})} - 1) \vdots q^{\alpha_i}.$$

Nếu $a \vdots q_i$ thì

$$a^{m-\varphi(m)} \vdots q^{m-\varphi(m)}.$$

Mặt khác, rõ ràng $m - \varphi(m) \geq \alpha_i$ (vì có ít nhất α_i số không nguyên tố với m là $q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_i^{\alpha_i}$). Do đó

$$a^{m-\varphi(m)} \vdots q^{m-\varphi(m)} \vdots q_i^{\alpha_i}.$$

Định lý được chứng minh.

Định lý 1.4 (Định lý Fermat)**.** Cho p là một số nguyên tố và a là một số nguyên không chia hết cho P khi ấy ta có

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Chứng minh. Theo giả thiết, ta có $\varphi(p) = p - 1$ và a là nguyên tố với p nên theo định lý Euler ta được $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Định lý 1.5 (Định lý Fermat dạng khác)**.** Cho p là một số nguyên tố và a là một số nguyên tùy ý khi ấy ta có

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Chứng minh. Nếu a chia hết cho p thì hiển nhiên $a^p \equiv a \pmod{p}$. Nếu a không chia hết cho p thì theo định lý 1.4 ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ cho nên sau khi nhân hai vế của đồng dư thức này với a ta được $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Ngược lại từ định lý 1.5 ta có thể suy ra định lý 1.4. Thật vậy, từ $a^p \equiv a \pmod{p}$ và a là một số nguyên không chia hết cho số nguyên tố p thế thì a nguyên tố với p nên bằng cách chia cho a ta được $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Chính vì vậy, người ta nói định lý 1.5 là dạng khác của định lý Fermat.

Ví dụ 1.2. Tìm các số nguyên x để $9x + 5$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.
Lời giải. Giả sử $9x + 5 = n(n + 1)$ với $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 36x + 20 = 4n^2 + 4n$. suy ra

$$36x + 21 = (2n + 1)^2 \Rightarrow 3(12x + 7) = (2n + 1)^2.$$

Số chính phương $(2n + 1)^2$ chia hết cho 3 nên nó cũng chia hết cho 9. Mặt khác $(12x + 7)$ không chia hết cho 3 nên $3(12x + 7)$ không chia hết cho 9.
Mâu thuẫn trên chứng tỏ không tồn tại số nguyên x nào để $9x + 5 = n(n + 1)$.

Ví dụ 1.3. Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là một số chính phương $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3$.
Lời giải. Đặt $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$ với $y \in \mathbb{N}$.
Ta thấy $y^2 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + x + 3) = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x + 3)$
Đặt $x^2 + x = a$ ta có $y^2 = a^2 + (x^2 + x + 3)$. Từ đó có $y^2 - a^2 = x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \Rightarrow y^2 > a^2$.
Dễ thấy $(a + 2)^2 - y^2 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\ 0 \Rightarrow (a + 2)^2 > y^2$.
Do đó $a^2 < y^2 < (a + 2)^2 \Rightarrow y^2 = (a + 1)^2$.
Suy ra $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 1)^2$. Suy ra $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -2$.
Thử lại, với $x = 1; x = -2$ thì biểu thức $9 = 3^2$. Vậy $x = 1; x = -2$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 1.4. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$xy = z^2. \tag{1.1}$$

Lời giải. Giả sử x_0, y_0, z_0 thỏa mãn (1.1) và có ƯSCLN bằng d.

Giả sử $x_0 = dx_1, y_0 = dy_1, z_0 = dz_1$ thì (x_1, y_1, z_1) cũng thỏa mãn (1.1).

Do đó, ta có thể giả sử $(x, y, z) = 1$ thì x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau vì nếu hai trong ba số x, y, z có ước chung là d thì số còn lại cũng chia hết cho d. Ta có $x.y = z^2$ mà $(x, y) = 1$ nên $x = a^2, y = b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Bởi vậy

$(1.1) \Leftrightarrow z^2 = x.y = (ab)^2 \Leftrightarrow z = (ab)$.

Như vậy ta được biểu thức nghiệm

$x = ta^2; y = tb^2; z = ab \ \ (t \in \mathbb{N}^*)$.

Ngược lại, dễ thấy các số x, y, z có dạng trên thỏa mãn (1.1). Vậy công thức trên cho ta tất cả các nghiệm nguyên dương của (1.1).

Ví dụ 1.5. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2. \tag{1.2}$$

Lời giải. $(1.2) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^2 + xy \Leftrightarrow (x + y)^2 = xy(xy + 1)$.

Ta thấy xy và $xy + 1$ là hai số nguyên liên tiếp nên:

+ Xét $xy = 0$, ta có $xy = 0$ và $x^2 + y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = y = 0.$$

+ Xét $xy + 1 = 0$, ta có : $xy = -1$ và $x^2 + y^2 = 2$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (1, -1); (-1, 1).$$

Thử lại, ba cặp số $(0, 0); (1, -1); (-1, 1)$. đều thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy phương trình trên có ba nghiệm nguyên là $(x, y) = (0, 0); (1, -1); (-1, 1)$.

b. Hàm tổng các ước của một số tự nhiên

Định nghĩa 1.2 (xem [2],[3])**.** Cho số nguyên dương n. Ta ký hiệu $\sigma(n)$ là tổng các ước của n.

Định lý 1.6 (xem [2],[3])**.** Hàm số $\sigma(n)$ có tính chất nhân tính theo nghĩa: Nếu a, b là hai số nguyên tố cùng nhau thì $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.